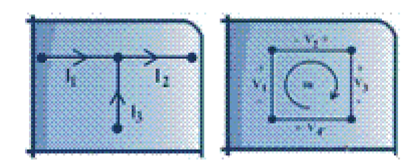
2. LEYES DE VOLTAJES Y CORRIENTES DE KIRCHHOFF



2.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo trata de las leyes de voltajes y corrientes de Kirchhoff llamadas KVL y KCL respectivamente. KVL establece que la suma algebraica de las caídas de voltaje en una secuencia cerrada de nodos es cero. Así mismo KCL establece que la suma algebraica de corrientes que entran en un nodo es igual a cero.

A partir de estos dos conceptos se derivan las ecuaciones requeridas para encontrar los equivalentes de elementos conectados en serie y en paralelo, así como las relaciones de los divisores de voltaje y corriente.

Estos conceptos serán la base para el análisis de circuitos complejos por los métodos de nodos y mallas.

2.2. CONCEPTOS BÁSICOS DE TOPOLOGÍA DE CIRCUITOS

Rama

Representación de un elemento o circuito de dos terminales.

Nodo

Punto de conexión entre dos o más ramas o elementos.

Camino cerrado o lazo

Conexión de ramas a través de una secuencia de nodos que comienza y termina en el mismo nodo pasando sólo una vez por cada nodo (sin repetir ramas). En los libros en inglés lo denominan ***loop***.

Malla

Camino cerrado (o lazo) en el cual no existen otros caminos cerrados al interior. En los libros en inglés lo denominan ***mesh***.

Red

Interconexión de varios elementos o ramas. En los libros en inglés lo denominan ***network***.

Circuito

Es una red con al menos un camino cerrado.

Corriente de Rama

Es la corriente neta en una rama.

Voltaje de Rama

Es la caída de voltaje entre los nodos de una rama.

Corriente de Malla

Es la corriente ficticia que se ha definido para una malla. La suma algebraica de las corrientes de malla que pasan por la rama da como resultado la corriente de rama.

Conexión Serie

Conexión de elementos en la cual la corriente es la misma en todos los elementos. Esto se tiene al conectar el fin de un nodo de una rama con el nodo de inicio de la siguiente rama de la secuencia.

Conexión Paralelo

Conexión de elementos entre dos nodos comunes (nodo superior con nodo superior y nodo inferior con nodo inferior) en la cual el voltaje es el mismo en todos los elementos.

Secuencia de Nodos Cerrada

Es una secuencia de nodos finita que comienza y termina en el mismo nodo. Aquí no se requiere que haya una rama entre los nodos.

Circuito Conectado

Es aquél en el cual cada nodo puede ser alcanzado desde otro nodo por un camino a través de los elementos del circuito.

2.3. KCL – LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF

Dado que la carga que entra a un nodo debe salir, y que ni se crea ni se destruye carga en los nodos, la carga neta que entra en un nodo es igual a la que sale del mismo. De lo anterior se puede deducir las siguientes leyes para la corriente:

1. La suma algebraica de corrientes de rama que **entran** a un nodo es cero, en cualquier instante de tiempo.
2. La suma algebraica de corrientes de rama que **salen** a un nodo es cero, en cualquier instante de tiempo.

De lo anterior se desprende el hecho de que no se pueden tener fuentes ideales de corriente en serie.

2.4. KCL – LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF EN CURVA GAUSSIANA

Una curva gaussiana es una curva cerrada que contiene en su interior varios nodos o ramas y que corta en dos algunas ramas.

En una curva gaussiana los dos enunciados anteriores para los nodos siguen siendo válidos:

1. La suma algebraica de corrientes de rama que **entran** en una curva gaussiana es cero, en cualquier instante de tiempo.

2. La suma algebraica de corrientes de rama que **salen** de una curva gaussiana, en cualquier instante de tiempo.

2.5. KVL – LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF

1. La suma algebraica de caídas de voltaje alrededor de un **camino cerrado** es cero, en cualquier instante de tiempo.
2. Para cualquier par de nodos *j* y *k*, la caída de voltaje de *j* a *k* V_{jk} es: $V_{jk} = V_j - V_k$, en cualquier instante de tiempo. Donde V_j es el voltaje de nodo del nodo *j* respecto a la referencia, y V_k es el voltaje de nodo del nodo *k* respecto a la referencia.
3. Para un circuito conectado una secuencia de nodos A-B-D-…-G-P, la caída de voltaje en cualquier instante de tiempo es: $\mathbf{V}_{AP} = \mathbf{V}_{AB} + \mathbf{V}_{BD} + \ldots + \mathbf{V}_{GP}$
4. Para un circuito conectado la suma algebraica de **voltajes nodo-a-nodo** para una secuencia de nodos cerrada es cero en cualquier instante de tiempo.

Ejemplo 2-1. KVL.

Para el circuito de la Figura 2-1 calcular Vx y Vy.

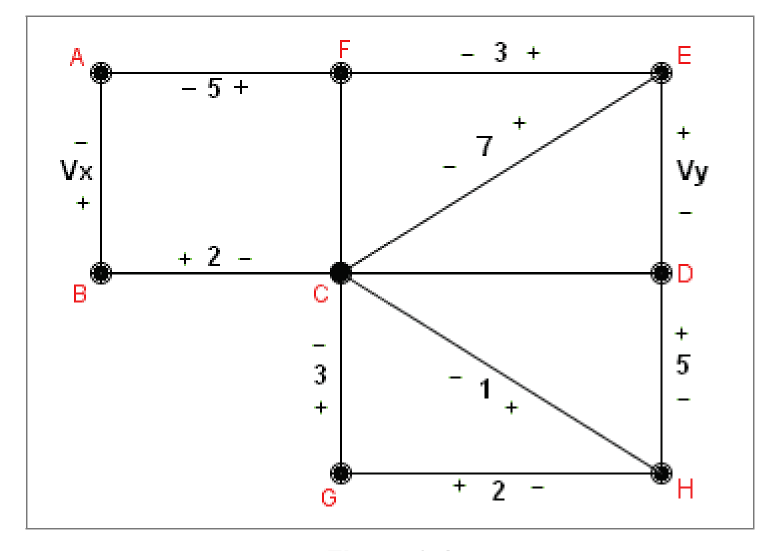


Figura 2-1

Solución

Usando el camino cerrado ABCEFA Y KVL: -Vx + 2 – 7 + 3 + 5 = 0 ⇒ **Vx = 3**

Usando el camino cerrado EDHCE Y KVL: Vy + 5 + 1 – 7 = 0 ⇒ **Vy = 1**

Ejemplo 2-2. Escritura de KVL y KCL en sus distintas formas.

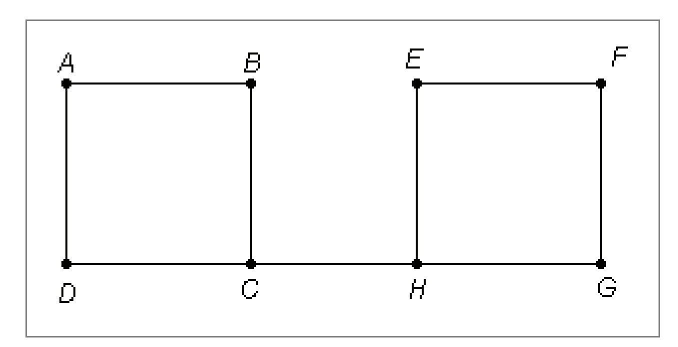


Figura 2-2

Para el circuito de la Figura 2-2:

a. Escribir dos ecuaciones para cada una de las cuatro formas de KVL.
b. Escribir dos ecuaciones de KCL en dos nodos diferentes.
c. Escribir dos ecuaciones de KCL en dos curvas gaussianas y demostrar que la corriente por la rama CH es cero.
d. Analizar cómo puede ser VCH si el elemento de esta rama es una fuente de voltaje, una resistencia o una fuente de corriente.

Solución

Parte a)

Forma 1: Seleccionamos el camino cerrado EFGH y lo recorremos en el sentido horario, haciendo que la sumatoria de caídas de voltaje sea igual a cero:

$$V_{EF} + V_{FG} + V_{GH} + V_{HE} = 0$$

Ahora seleccionamos el camino cerrado DCBAD y lo recorremos en el sentido contra-horario, haciendo que la sumatoria de caídas de voltaje sea igual a cero:

$$V_{DC} + V_{CB} + V_{BA} + V_{AD} = 0$$

Forma 2: Calculamos la caída de voltaje en la rama AB como

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

Ahora calculamos la caída de voltaje entre el nodo A y el nodo H:

$$V_{AH} = V_A - V_H$$

Forma 3: Seleccionamos la secuencia (no cerrada) de nodos ABCH y obtenemos la caída de voltaje entre el nodo A y el nodo H:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CH} = V_{AH}$$

Forma 4: Seleccionamos la secuencia cerrada de nodos BCHEB y calculamos los voltajes nodo a nodo, que deben sumar cero:

$$V_{BC} + V_{CH} + V_{HE} + V_{EB} = 0$$

Nótese que entre E y B no hay rama pero al cerrar la secuencia de nodos la suma de voltajes debe ser cero. Podemos llegar a este resultado aplicando las otras formas: primero escribimos la forma 3 para el camino no cerrado BCHE calculando la caída de voltaje entre el nodo B y E:

$$V_{BC} + V_{CH} + V_{HE} = V_{BE}$$

Por la forma 2 tenemos:

$$V_{BE} = V_B - V_E$$
$$V_{EB} = V_E - V_B = -V_{BE}$$

entonces

$$V_{BC} + V_{CH} + V_{HE} = V_{BE} = -V_{EB}$$

$$V_{BC} + V_{CH} + V_{HE} + V_{EB} = 0$$

Parte b)

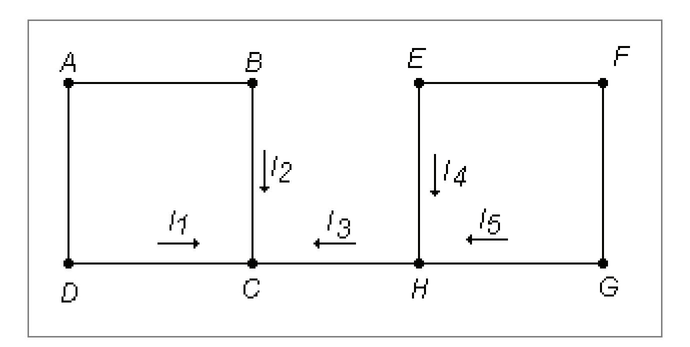


Figura 2-3

Usamos las corrientes de rama definidas en la Figura 2-3. Aplicamos KCL en el nodo C haciendo que la suma algebraica de corrientes que entran se cero:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Ahora aplicamos KCL en el nodo H haciendo que la suma algebraica de corrientes que entran se cero:

$$I_4 + I_5 + (-I_3) = 0$$

$$I_4 + I_5 - I_3 = 0$$

Lo cual es equivalente a decir que las corrientes definidas entrando son iguales a las corrientes definidas saliendo:

$$I_4 + I_5 = I_3$$

Parte c)

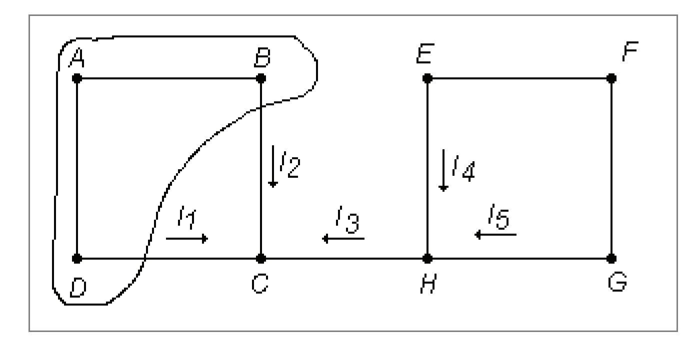


Figura 2-4

Usamos las corrientes de rama y la curva gaussiana definidas en la Figura 2-4. Aplicamos KCL en a la curva haciendo que la suma de corrientes que entran sea cero:

$$(-I_1)+(-I_2)=0$$

Por lo tanto:

$$I_1+I_2=0$$

De la parte (b) tenemos que $I_1+I_2+I_3=0$, de manera que $I_3=0$, lo que demuestra que la corriente en la rama CH es cero.

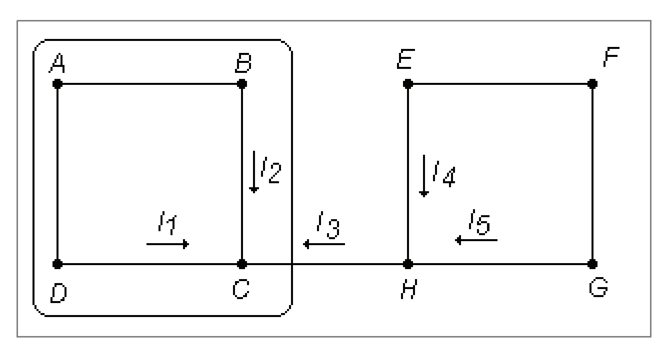


Figura 2-5

Ahora seleccionamos la curva gaussiana de la Figura 2-5 y calculamos KCL:

$$I_3=0$$

Parte d)

Si el elemento es una resistencia *R* tenemos por ley de Ohm:

$$V_{CH}=I_{CH}R=(-I_3)R=(0)R=0$$

Si el elemento es una fuente de voltaje $+V_o-$ (potencial más alto en C que en H) tenemos:

$$V_{CH}=V_C-V_H=V_o$$

Si el elemento es un corto tenemos que el potencial en C y en H es el mismo y por tanto la caída de voltaje es cero:

$$V_{CH} = V_C - V_H = 0$$

Si el elemento es una fuente de corriente I_o podríamos tener una violación a KCL, ya que hemos demostrado que $I_3 = 0$.

Ejemplo 2-3. Aplicación numérica de KVL.

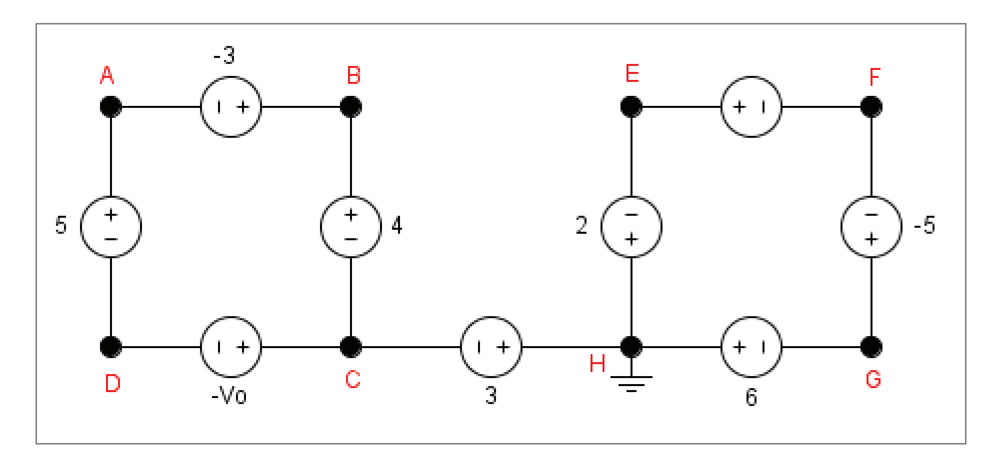


Figura 2-6

Para el circuito de la Figura 2-6 usar KVL para calcular V_{CD}, Vo, V_{DH} y V_{BE}.

Solución

En el camino cerrado DABCD conocemos todas las caídas de voltaje menos la de C a D que es la que queremos encontrar, de manera que se puede aplicar la primera forma de KVL:

$$V_{DA} + V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} = 0$$
$$(-5V) + (-[-3V]) + (4V) + V_{CD} = 0$$
$$2V + V_{CD} = 0$$
$$V_{CD} = -2V$$
$$V_{DC} = 2V$$

Para calcular Vo partimos del valor de V_{CD}:

$$V_{CD} = -2V = V_C - V_D = -V_O$$
$$V_O = 2V$$

Para calcular V_{DH} aplicamos la forma tres de KVL en el camino no cerrado DCH:

$$V_{DH} = V_{DC} + V_{CH} = (2V) + (-3V) = -1V$$

Ejemplo 2-4. KVL.

Para el circuito de la Figura 2-7 encontrar las caídas de voltaje *y*, *w* y *z*.

Solución

Vamos a aplicar KVL en los caminos cerrados BEFGCB para encontrar *y*; luego ADCGFA para encontrar *w* y ABEFA para encontrar *z*.

$$2 + y - 1 - 2 + 3 = 0 \qquad w + 2 + 2 + 1 + 3 = 0 \qquad z + 2 + y + 3 = 0$$

$$y = 3 - 5 \qquad w = -8 \qquad z + 2 + (-2) + 3 = 0$$

$$y = -2 \qquad z = -3$$

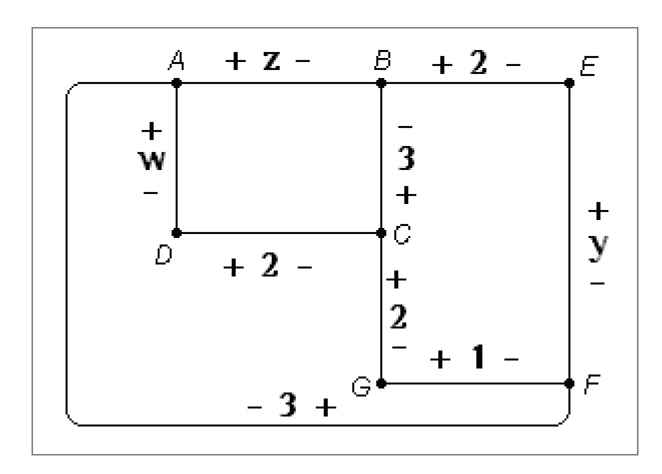


Figura 2-7

Ejemplo 2-5. Aplicación de KCL en cálculo de voltaje de un nodo.

Para el circuito de la Figura 2-8 calcular el voltaje de nodo del nodo B usando KCL.

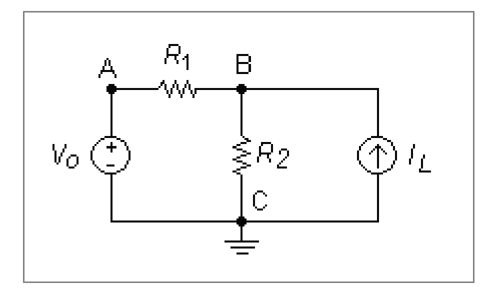


Figura 2-8

Solución

Se definen las corrientes que entran al nodo B como se muestra en la siguiente figura y luego se aplica KCL:

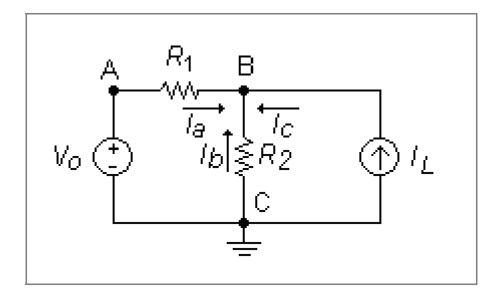


Figura 2-9

$$I_a + I_b + I_c = 0$$

Dado que el nodo C es la tierra o referencia su voltaje es cero:

$$V_C = 0$$

Por lo tanto el voltaje del nodo A es Vo.

La corriente I_C es igual I_L.

Ahora se calculan las corrientes Ia e Ib usando la ley de Ohm:

$$I_a = \frac{V_O - V_B}{R_1} \; ; \; I_b = \frac{0 - V_B}{R_2}$$

De manera que la ecuación de KCL queda:

$$\frac{V_O - V_B}{R_1} + \frac{0 - V_B}{R_2} + I_L = 0$$

Despejando V_B tenemos:

$$V_B = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_O + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_L$$

Ejemplo 2-6. KCL, KVL.

Para el circuito de la Figura 2-10 encontrar:

a. I_3, I_4, I_6 si se sabe que $I_1 = 1$, $I_2 = 1$ e $I_5 = 3$.

b. I_1, I_3, I_4, I_6 si se sabe que $I_2 = 1$ e $I_5 = 1$.

c. V_x, V_y y V_z si $V_r = -2$, $V_s = 3$ y $V_z = -2$.

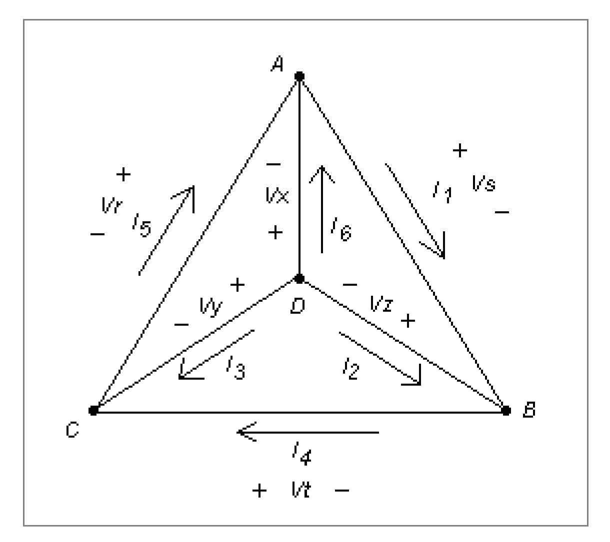


Figura 2-10

Solución

Parte a)

KCL en nodo B: $I_1 + I_2 - I_4 = 0$ $1 + 1 - I_4 = 0$ $\boxed{I_4 = 2}$	KCL en nodo C: $I_3 + I_4 - I_5 = 0$ $I_3 + 2 - 3 = 0$ $\boxed{I_3 = 1}$
KCL en nodo D: $I_2 + I_3 + I_6 = 0$ $1 + 1 + I_6 = 0$ $\boxed{I_6 = -2}$	Como prueba podemos hacer el nodo A: KCL en nodo A: $I_1 - I_5 - I_6 = 0$ $1 - 3 - (-2) = 0$ $\boxed{0 = 0}$

Parte b)

KCL en nodo A: $I_5 + I_6 - I_1 = 0$ $I_6 - I_1 = -1$	KCL en nodo B: $I_1 + I_2 - I_4 = 0$ $I_1 - I_4 = -1$

KCL en nodo C:	KCL en nodo D:
$I_3 + I_4 - I_5 = 0$ $I_3 + I_4 = 1$	$I_2 + I_3 + I_6 = 0$ $I_3 + I_6 = -1$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

El cual tiene como solución:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Parte c)

KVL en malla ABDA:	KVL en malla ADCA:
$V_{AB} + V_{BD} + V_{DA} = 0$ $V_s + V_z + V_x = 0$ $3 + (-2) + V_x = 0$ $\boxed{V_x = -1}$	$V_{AD} + V_{DC} + V_{CA} = 0$ $-V_x + V_y - V_r = 0$ $-(-1) + V_y - (-2) = 0$ $\boxed{V_y = -3}$
KVL en malla BCDB: $V_{BC} + V_{CD} + V_{DB} = 0$ $-V_t - V_y - V_z = 0$ $-V_t - (-3) - (-2) = 0$ $\boxed{V_t = 5}$	Como prueba podemos hacer la malla ABCA: $V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0$ $-V_s - V_t - V_r = 0$ $3 - (5) - (-2) = 0$ $\boxed{0 = 0}$

2.6. RESISTENCIA EQUIVALENTE Y DIVISORES

2.6.1. RESISTENCIA EN SERIE Y DIVISOR DE VOLTAJE

La figura 1.a muestra un circuito de una fuente de voltaje V_x conectada a tres resistencias en serie. Por la ley de Ohm las caídas de voltaje en cada resistencia R_1, R_2 y R_3 son V_1, V_2 y V_3 respectivamente.

De acuerdo a KVL y a la ley de Ohm tenemos:

$$V_x = V_1 + V_2 + V_3 = R_1 I_x + R_2 I_x + R_3 I_x = (R_1 + R_2 + R_3) I_x$$

De donde

$$I_x = \frac{V_x}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Para j = 1, 2 y 3 se tiene:

$$V_j = R_j I_x = R_j \frac{V_x}{R_1 + R_2 + R_3} = V_x \frac{R_j}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Esta última relación se conoce como el **divisor de voltaje**.

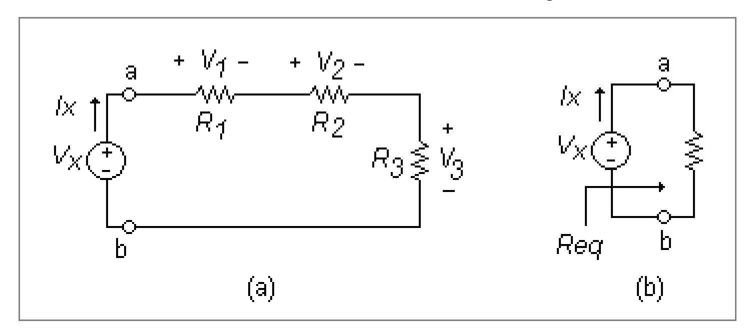


Figura 2-11

El circuito de la figura 1.b es equivalente desde el punto de vista de la fuente *Vx* al de la figura 1.a. La resistencia vista por la fuente se denomina resistencia equivalente y se calcula como:

$$R_{eq} = \frac{V_x}{I_x}$$

Así

$$R_{eq} = \frac{V_x}{\dfrac{V_x}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

Por lo tanto

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Lo cual indica que la resistencia equivalente de un grupo de resistencias en serie es la suma de las resistencias.

2.6.2. RESISTENCIA EN PARALELO Y DIVISOR DE CORRIENTE

La Figura 2-12 muestra un circuito de una fuente de voltaje *Vx* conectada a dos resistencias en paralelo.

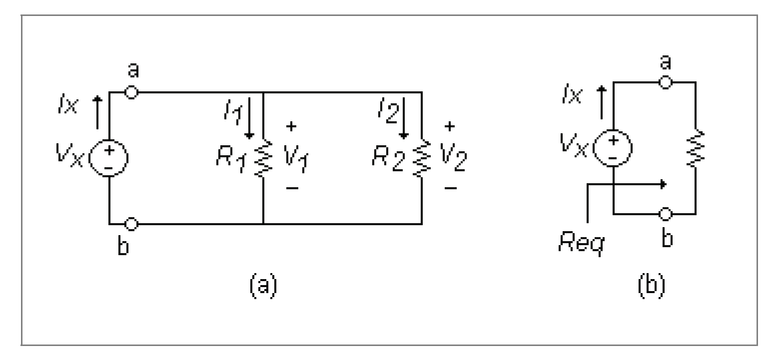


Figura 2-12

De acuerdo a KCL y a la ley de Ohm tenemos:

$$I_X = I_1 + I_2 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}$$

Y dado que las resistencias están en paralelo con la fuente $V_X = V_1 = V_2$:

$$I_X = \frac{V_X}{R_1} + \frac{V_X}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_X$$

De donde

$$\frac{I_X}{V_X} = \frac{1}{R_X} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{eq}}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Lo cual indica que el inverso de la resistencia equivalente de un grupo de resistencias en paralelo es la suma de los inversos de cada una de las resistencias. Sabiendo que la conductancia *G* es $1/R$ tenemos:

$$G_{eq} = G_1 + G_2$$

Lo cual indica que la conductancia equivalente de un grupo de resistencias en paralelo es la suma de sus respectivas conductancias.

Para j = 1 y 2 se tiene:

$$I_j = \frac{V_X}{R_j} = \frac{I_X R_{eq}}{R_j} = \frac{I_X G_j}{G_{eq}}$$

$$I_j = I_X \frac{G_j}{G_1 + G_2}$$

Esta última relación se conoce como el **divisor de corriente**.

Ejemplo 2-7. Resistencia Equivalente.

Encontrar la resistencia equivalente ***Req*** para el circuito de la figura 3, si $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 5\ \Omega$.

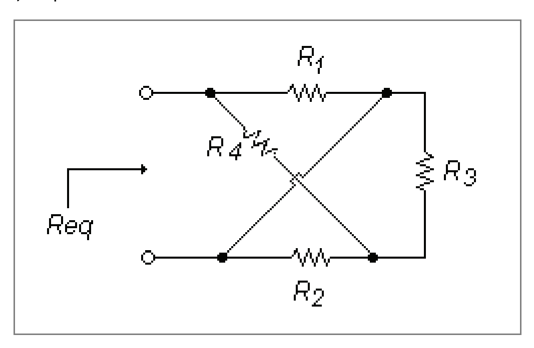


Figura 2-13

Solución

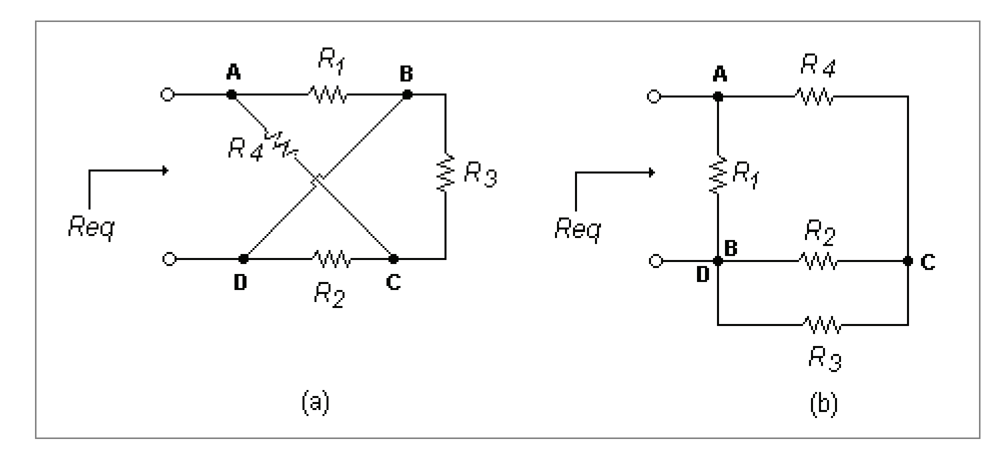


Figura 2-14

El circuito (a) es equivalente al (b) ya que los nodos B y D son uno solo. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
R_{eq} &= [(R_2 // R_3) + R_4] // R_1 \\
&= [(10 // 10) + 5] // 20 \\
&= [5 + 5] // 20 \\
&= 10 // 20 \\
&= \frac{10 \times 20}{10 + 20}\Omega = \frac{200}{30}\Omega = 6.7\Omega
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2-8. Resistencia equivalente y Resistencia vista por la fuente.

Para el circuito de la Figura 2-15 encontrar la resistencia equivalente vista por la fuente:

a. haciendo conversión de resistencias.
b. calculando Req = V / I.

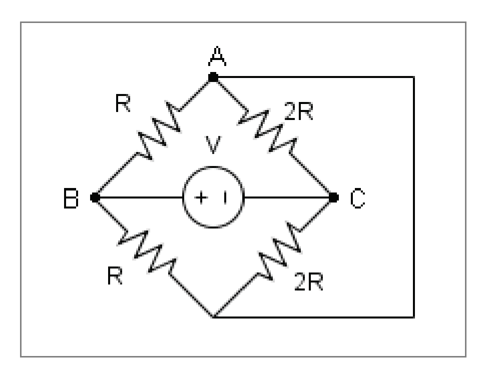


Figura 2-15

Solución

Parte a)

El circuito mostrado en la Figura 2-16 es equivalente al de la Figura 2-15.

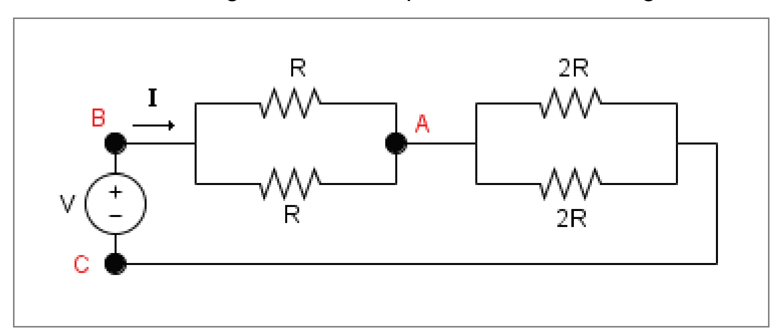


Figura 2-16

$$Req = R//R + 2R//2R = R/2 + R = 3R/2$$

Parte b)

$$Req = V / I$$

Haciendo KCL en el nodo B:

$$I = (V - VA) / R + (V - VA) / R = 2(V - VA) / R$$

Haciendo KCL en el nodo A:

$$(V - VA) / R + (V - VA) / R + (0 - VA)/2R + (0 - VA)/2R = 0$$
$$2(V - VA) / R - VA/R = 0$$
$$VA = 2V/3$$
$$I = 2(V - VA) / R = 2(V - (2V/3)) / R = 2V/3R$$
$$Req = V / I = V / (2V/3R) = \mathbf{3R/2}$$

2.7. CONVERSIÓN DELTA – ESTRELLA (Δ-Y)

Algunas conexiones entre elementos no se encuentran ni en serie ni en paralelo, de manera que es más difícil encontrar su equivalente. Este es el caso de las conexiones delta-estrella como la mostrada en la siguiente figura.

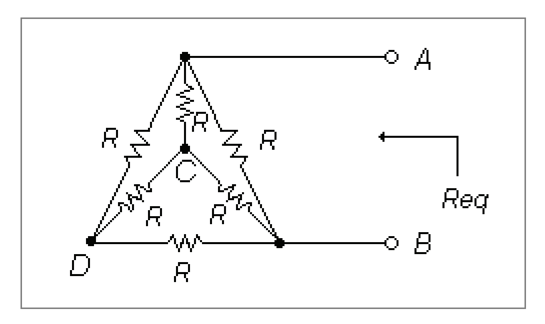


Figura 2-17

Para encontrar la resistencia equivalente se puede usar KVL o KCL, pero en algunos casos resulta más sencillo hacer la conversión delta-estrella que se muestra a continuación.

La idea del procedimiento es reemplazar un circuito en configuración estrella como el de la figura 5.a por uno que de un resultado equivalente para los nodos ABC como el mostrado en la figura 5.b que es una conexión en delta. Otra posibilidad es pasar del circuito en delta la equivalente en estrella. Para esto se aplican las relaciones presentadas a continuación:

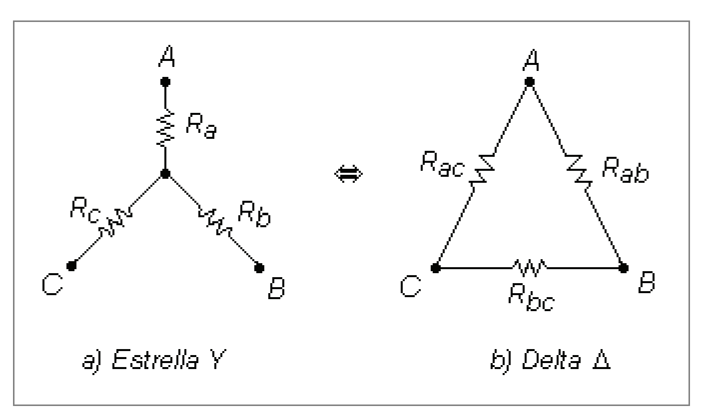


Figura 2-18

Tabla 2-1. Conversiones Delta-Estrella. Caso general.

Conversión Delta a Estrella	Conversión Estrella a Delta
$R_a = \frac{R_{ab}R_{ac}}{R_\delta}$ $R_b = \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_\delta}$ $R_c = \frac{R_{ac}R_{bc}}{R_\delta}$ $R_\delta = R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}$	$R_{ab} = \frac{R_\lambda}{R_c}$ $R_{ac} = \frac{R_\lambda}{R_b}$ $R_{bc} = \frac{R_\lambda}{R_a}$ $R_\lambda = R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c$
a)	b)

En el caso de que las tres resistencias sean iguales reemplazando en las fórmulas de la Tabla 2-1. tenemos como resultado los valores de la Tabla 2-2.:

Tabla 2-2. Conversiones Delta-Estrella. Resistencias iguales.

Conversión Delta a Estrella	Conversión Estrella a Delta
$R_{ab} = R_{ac} = R_{bc} = R_\Delta$ $R_\delta = R_{ab} + R_{ac} + R_{bc} = 3R_\Delta$ $R_a = R_b = R_c = \frac{R_\Delta R_\Delta}{3R_\Delta} = \frac{R_\Delta}{3} = R_Y$ $\frac{R_\Delta}{3} = R_Y$	$R_a = R_b = R_c = R_Y$ $R_\lambda = R_Y R_Y + R_Y R_Y + R_Y R_Y = 3R_Y{}^2$ $R_{ab} = R_{ac} = R_{bc} = \frac{3R_Y{}^2}{R_Y} = 3R_Y = R_\Delta$ $3R_Y = R_\Delta$
a)	b)

Como se puede ver para resistencia iguales la conversión entre delta y estrella es muy sencilla:

$$3R_Y = R_\Delta$$

Este es un resultado muy útil que será utilizado frecuentemente en los circuitos trifásicos con carga balanceada.

Ejemplo 2-9. Resistencia Equivalente delta-estrella.

Para el siguiente circuito encontrar la resistencia equivalente *Req* entre los nodos *A* y *B*, si todas las resistencias valen *R*, usando:

a. KVL o KCL.
b. Conversión delta-estrella.

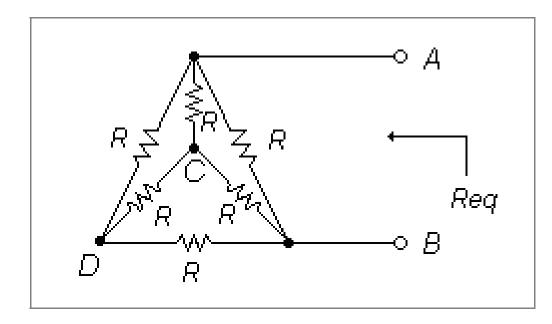


Figura 2-19

Solución

Parte a)

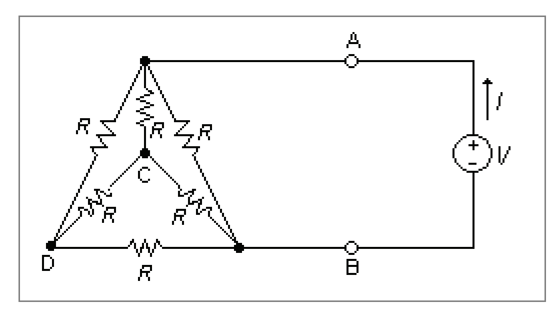


Figura 2-20

Nodos

Nodo B:	Tierra: $V_b = 0$
Nodo A:	$V_a = V$
Nodo C:	KCL: $$\frac{V_a - V_c}{R} + \frac{V_d - V_c}{R} + \frac{V_b - V_c}{R} = 0$$ $$\frac{V - V_c}{R} + \frac{V_d - V_c}{R} + \frac{-V_c}{R} = 0$$ $$V_c = \frac{V + V_d}{3} \qquad (1)$$
Nodo D:	KCL: $$\frac{V_a - V_d}{R} + \frac{V_c - V_d}{R} + \frac{V_b - V_d}{R} = 0$$ $$\frac{V - V_d}{R} + \frac{V_c - V_d}{R} + \frac{-V_d}{R} = 0$$ $$V_d = \frac{V + V_c}{3} \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) se obtiene:

$$V_d = \frac{V + V_c}{3} = \frac{V + \frac{V + V_d}{3}}{3} = \frac{4V + V_d}{9}$$

$$9V_d = 4V + V_d$$

$$8V_d = 4V$$

$$\boxed{V_d = \frac{V}{2}}$$

$$V_c = \frac{V + \frac{V}{2}}{3} = \frac{3V}{6} = \frac{V}{2}$$

$$\boxed{V_d = V_c = \frac{V}{2}}$$

En el nodo A se puede plantear la siguiente ecuación:

$$I = \frac{V_a - V_d}{R} + \frac{V_a - V_c}{R} + \frac{V_a - V_b}{R}$$

$$IR = V - \frac{V}{2} + V - \frac{V}{2} + V$$

$$IR = 2V$$

$$\frac{V}{I} = \frac{R}{2}$$

$$\boxed{R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{R}{2}}$$

Parte b)

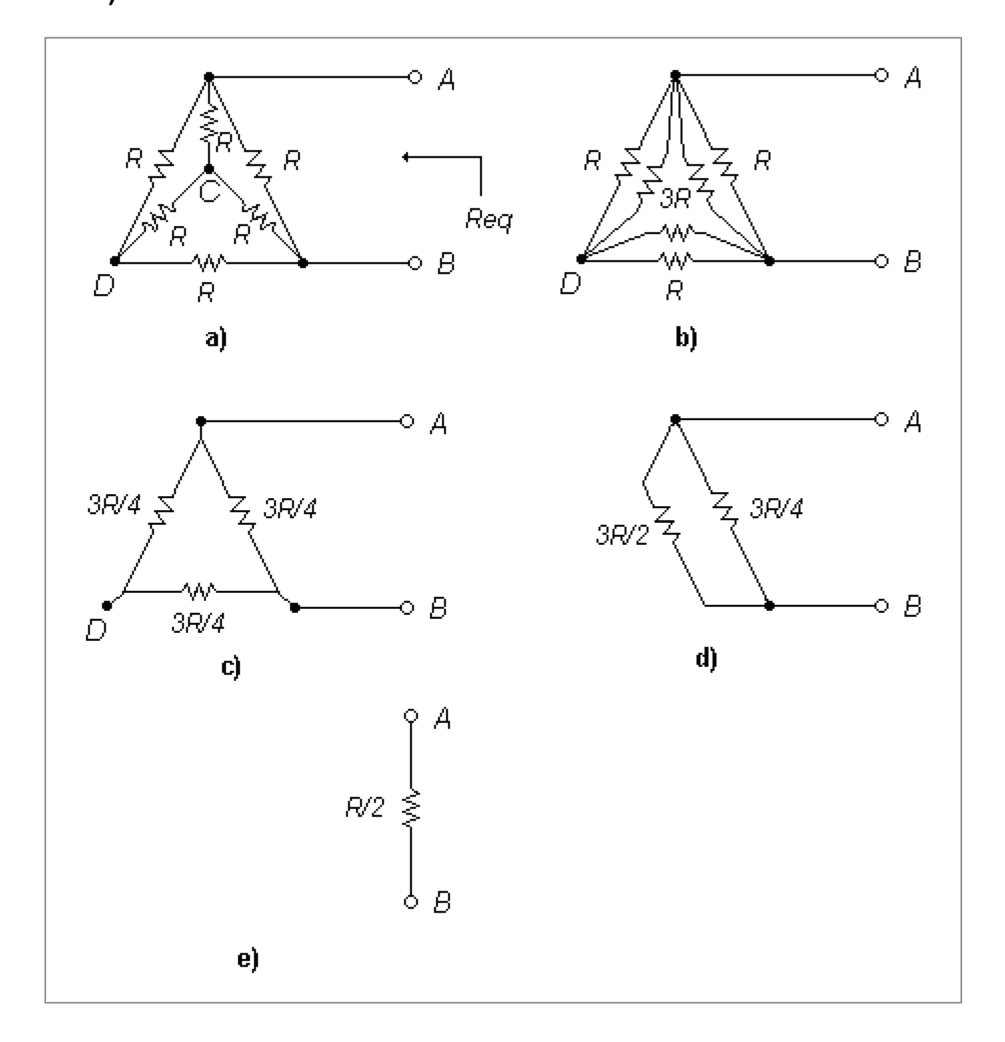


Figura 2-21

Partimos del circuito (a) donde todas las resistencias valen *R*. En (b) convertimos las resistencias internas que están en estrella a delta, de manera que las nuevas resistencias valen *3R*. Luego en (c) hacemos el paralelo de las resistencias externas con las internas (*R//3R*) = *3R/4*. En (d) sumamos en serie las resistencias entre AD y DB teniendo *3R/2*. Finalmente en e hacemos el paralelo entre *3R/2* y *3R/4* teniendo un equivalente final de ***R/2***, igual que lo encontrado en la solución de la parte (a).

2.8. SIMULACIONES

2.8.1. KCL – LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF

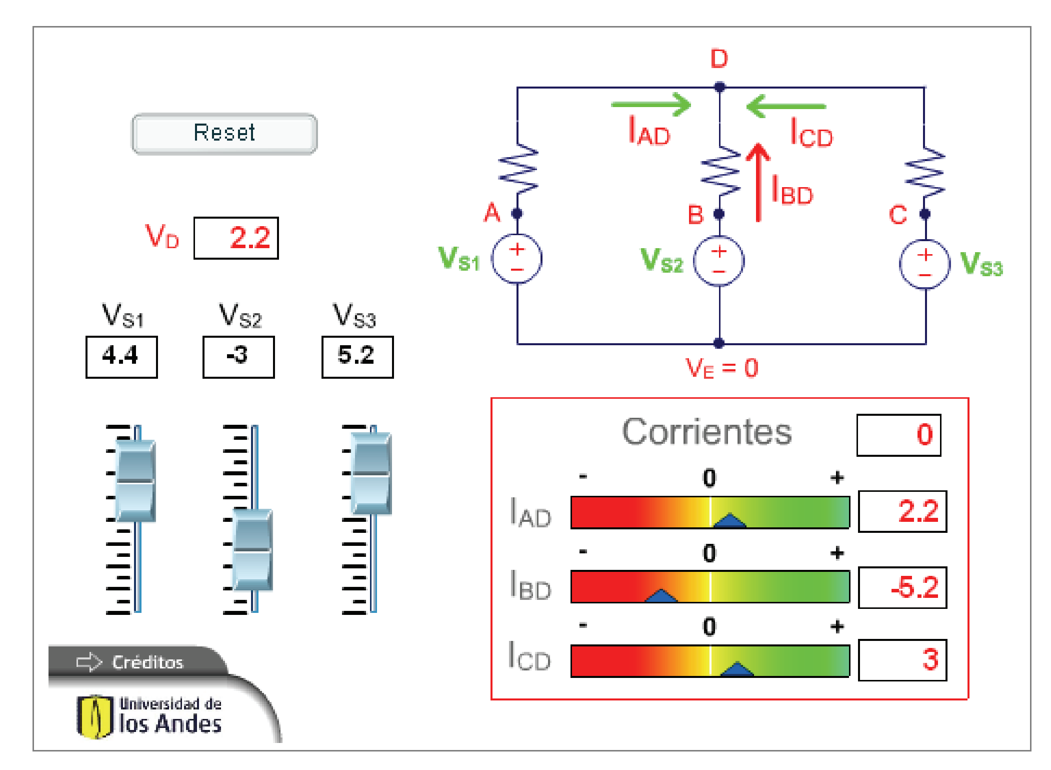


Figura 2-22

Descripción

Esta simulación pretende mostrar la Ley de Corrientes de Kirchhoff, a partir de la observación de las corrientes que entran a un nodo luego de variar los voltajes de las fuentes. El estudiante podrá ver como cambia la dirección de la corriente real y como las corrientes toman valores positivos a negativos con respecto a la dirección definida inicialmente como positiva y como la suma de tales corrientes siempre es cero.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de nodo, voltaje, corriente y leyes de Kirchhoff, interactúan con el recurso estableciendo los valores de los voltajes de las fuentes, para luego visualizar las direcciones reales del flujo de corriente en el circuito y el voltaje que adquiere el nodo analizado. Se pueden plantear ejercicios en los que el estudiante deba comparar la simulación ante diferentes valores de voltajes, con el fin de comprobar lo enunciado en la Ley de Corrientes de Kirchhoff.

2.8.2. KVL – LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF

Figura 2-23

Descripción

Esta simulación pretende mostrar la Ley de Voltajes de Kirchhoff. A partir de la observación de todos los voltajes de rama se puede comprobar que la suma de caídas de voltaje en un camino cerrado es igual a cero, independientemente de los valores que tomen las fuentes y de que los voltajes de rama tomen valores positivos o negativos.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de camino cerrado o lazo, caída de voltaje, voltaje de rama y KVL, interactúan con el recurso estableciendo los valores de los voltajes en un circuito para luego visualizar el valor de los voltajes en las ramas. Finalmente, como aplicación de la Ley de voltajes de Kirchhoff, el estudiante puede ver la suma de las caídas de voltaje en los caminos cerrados definidos es igual a cero.